



SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL
UNI



Álgebra

Tema: Números complejos I

Docente: Segundo Heli Chiroque Reyes

academiacesarvallejo.edu.pe

UNIDAD IMAGINARIA

Se denota por i y se define:

$$i = \sqrt{-1}$$

Donde: $i^2 = -1$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1$$

Potencias enteras de la unidad imaginaria

Se define: $i^0 = 1$ $i^1 = i$

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Se observa que $i^n \in \{-1; 1; -i; i\}, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$

PROPIEDADES

① $i^{4k} = 1 ; \forall k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

$$\diamond i^{84} = i^{4 \cdot 21} = 1$$

$$\diamond i^{2036} = i^{20\mathbf{36}} = 1$$

$$\diamond i^{-64} = 1$$

② $i^{4k+n} = i^n ; \forall k, n \in \mathbb{Z}$

Ejemplos

$$\diamond i^{1747} = i^{\cancel{4 \cdot 436} + 3} = i^3 = -i$$

$$\diamond i^{3694} = i^{\cancel{4 \cdot 923} + 2} = i^2 = -1$$

$$\diamond i^{-35} = i^{-36+1} = i^1 = i$$

UNIDAD IMAGINARIA

Se denota por i y se define:

$$i = \sqrt{-1}$$

Donde: $i^2 = -1$

Potencias enteras de la unidad imaginaria

Se define: $i^0 = 1$ $i^1 = i$

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Se observa que $i^n \in \{-1; 1; -i; i\}, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$

PROPIEDADES

① $i^{4k} = 1 ; \forall k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

$$\diamond i^{84} = i^{4 \cdot 21} = 1$$

$$\diamond i^{2036} = i^{20\mathbf{36}} = 1$$

$$\diamond i^{-64} = 1$$

② $i^{4k+n} = i^n ; \forall k, n \in \mathbb{Z}$

Ejemplos

$$\diamond i^{1747} = i^{4 \cdot 436 + 3} = i^3 = -i$$

$$\diamond i^{3694} = i^{4 \cdot 923 + 2} = i^2 = -1$$

$$\diamond i^{-35} = i^{-36+1} = i^1 = i$$

③ $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4k} = 0; \forall k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo:

❖ $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{40} = 0$

Ejemplo: Calcule el valor de S.

$$S = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2023}$$

$$S = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2023}}_{0} + i^{2024} - i^{2024}$$

$$S = -i^{2024} = -i^4 = -1$$

④ $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0; \forall k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

❖ $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20} = 0$

❖ $i^{-22} + i^{-23} + i^{-24} + i^{-25} = 0$

Aplicación

Determine el valor de

$$S = i^{13} + i^{-14} + i^{15} + i^{-16} + \dots + i^{63}$$

A) 1 B) i C) -1 D) $1+i$ E) $-i$

Resolución

$$\rightarrow i^{13} = i^{4+9} = i^1 \quad \rightarrow i^{-14} = i^{4+2} = i^2 = -1$$

$$\rightarrow i^{15} = i^{4+3} = -i \quad \rightarrow i^{-16} = i^{4+4} = 1$$

Juego:

$$S = \underbrace{i + i^{-2} + i^3 + i^{-4} + \dots + i^{12} + i^{13} + i^{-14} + \dots + i^{63}}_{0} + i^{64} - i^{64}$$

$$S = -i^{64} = -1$$

DEFINICIÓN (Número complejo)

Un número complejo z es un par ordenado $(a; b)$ de números reales, es decir:

$$z = (a; b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$z = (a; b) = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$$

Donde: a : Parte real de z ($a = \text{Re}(z)$)

b : Parte imaginaria de z ($b = \text{Im}(z)$)

Observación

El conjunto de los números complejos, se denota por:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

Ejemplo

$$\text{Si } z = \sqrt{3} - 4i \Rightarrow \text{Re}(z) = \sqrt{3} \quad \wedge \quad \text{Im}(z) = -4$$

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sean: $a; b; m; n \in \mathbb{R}$

$$a + bi = m + ni \leftrightarrow a = m \wedge b = n$$

Aplicación

Halle los números complejos $(x; y)$ que satisfacen la ecuación: $x^3 - 1 + 3i = 26 + (y^2 - 1)i$

Resolución

$$\begin{aligned} (x^3 - 1) + 3i &= 26 + (y^2 - 1)i \\ \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = 26 \\ 3 = y^2 - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \text{ y } y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\therefore (3; 2) \text{ y } (3; -2)$

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$,

1) z es un número complejo real si y solo si

$$\text{Im}(z) = b = 0 \quad \wedge \quad a \neq 0$$

2) z es un número complejo imaginario puro si y solo si

$$\text{Re}(z) = a = 0 \quad \wedge \quad b \neq 0$$

3) z es un número complejo nulo si y solo si

$$a = b = 0$$

Aplicación

Sea $x \in \mathbb{R}$. Halle los valores de x si $(x + 2i)^3$ es un complejo imaginario puro.

Resolución

$(x + 2i)^3$ es complejo imaginario puro

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (x + 2i)^3 &= x^3 + 3x^2(2i) + 3x(2i)^2 + (2i)^3 \\ &= \underbrace{x^3}_{\text{real}} + 6x^2i - \underbrace{12x}_{\text{real}} - 8i \\ &= (\underbrace{x^3 - 12x}_{=0}) + (6x^2 + 8)i \end{aligned}$$

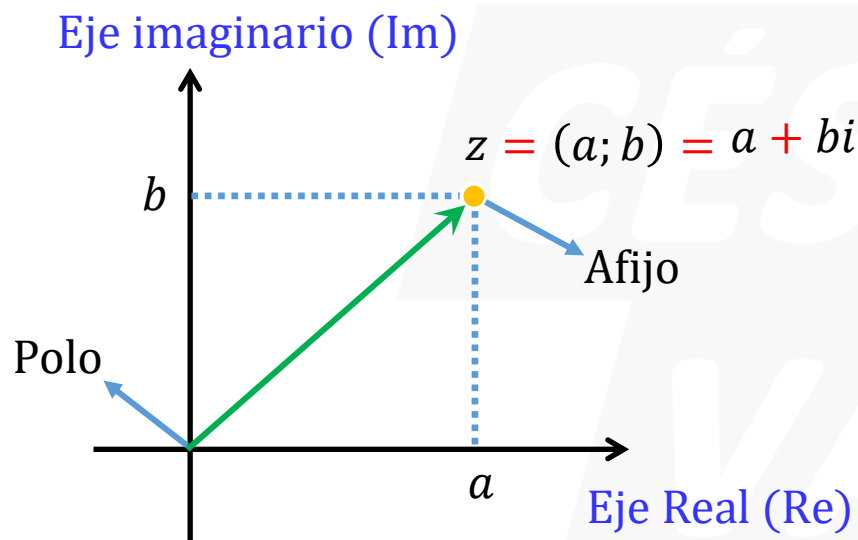
$$\hookrightarrow x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12) = 0$$

$$x(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0; \quad x = -2\sqrt{3}; \quad x = 2\sqrt{3}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = (a; b) = a + bi \in \mathbb{C}$, donde $a > 0, b > 0$, su representación gráfica es



DEFINICIONES

Sea el complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define

- Conjugado de z como $\bar{z} = a - bi$

- Opuesto de z como

$$z^* = -a - bi$$

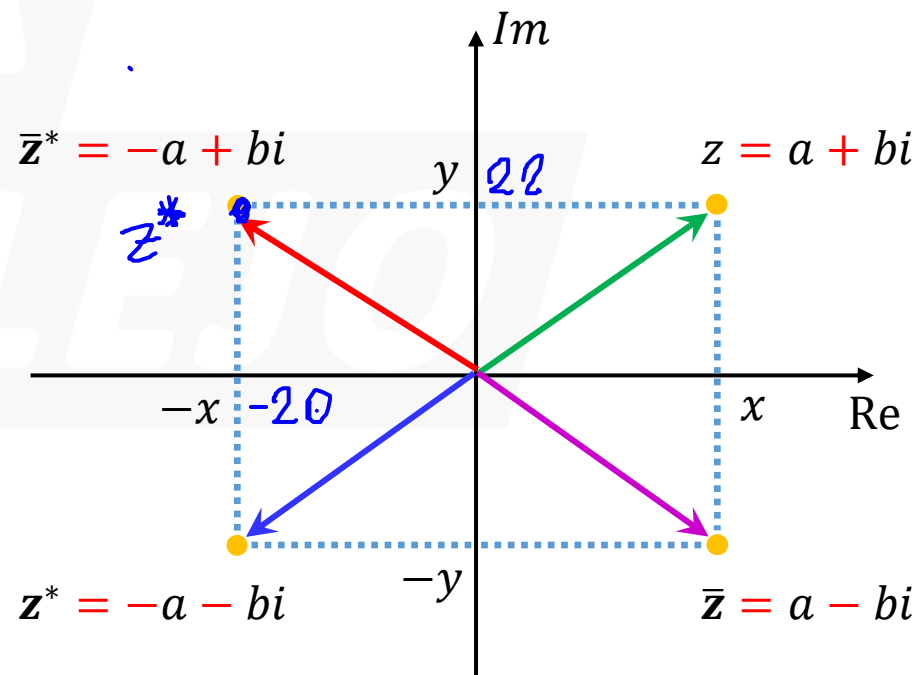
Ejemplo

Si $z = 20 - 22i \Rightarrow$

$$\bar{z} = 20 + 22i$$

$$z^* = -20 + 22i \checkmark$$

Representación geométrica de $z = a + bi$, $\bar{z}$, z^* , $\bar{z}^*$



OPERACIONES EN $\mathbb{C}$

Sean los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = m + ni$; se definen las siguientes operaciones:

Adición y sustracción

$$z_1 + z_2 = (a + m) + (b + n)i$$

$$z_1 - z_2 = (a - m) + (b - n)i$$

Multiplicación

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (m + ni)$$

$$i^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = (am - bn) + (an + bm)i$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(m - ni)}{(m + ni)(m - ni)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{am + bn}{m^2 + n^2} + \frac{bm - an}{m^2 + n^2}i$$

Ejemplos:

$$\text{Sean } z_1 = \underline{3} + 7i \text{ y } z_2 = \underline{5} + 2i$$

$$\diamond z_1 + z_2 = 8 + 9i$$

$$\diamond z_1 - z_2 = (3 + 7i) - (5 + 2i) = -2 + 5i$$

$$\diamond z_1 \cdot z_2 = (3 + 7i)(5 + 2i) = 15 + 6i + 35i + 14i^2$$

$$\diamond \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 7i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = 1 + i$$

Resultados notables

$(1 + i)^2 = 2i$	$(1 + i)^4 = -4$ ✓	$\frac{1 + i}{1 - i} = i$
$(1 - i)^2 = -2i$	$(1 - i)^4 = -4$	$\frac{1 - i}{1 + i} = -i$

Observación

Sea: $z = \frac{a + bi}{m + ni}$

▪ z es un complejo real si: $an = bm$

▪ z es un complejo imaginario puro si:

$$am + bn = 0$$

Aplicación

Si el número complejo $w = \frac{a+3\lambda i}{12+a\lambda i}$, $\lambda \neq 0$ representa un número real, determine el menor valor de $2a - 1$.

A) 11 B) -11 ~~C) -13~~ D) 12 E) 10

Resolución

Por la propiedad:

$$z(\cancel{a}) = (\cancel{3}) (12)$$

$$a^2 = 36$$

$$a = \pm 6$$

$$\therefore (2a - 1)_{\text{menor}} = -13$$

Otra forma:

$$\frac{a + 3\lambda i}{12 + a\lambda i} = k$$

$$a + 3\lambda i = 12k + a\lambda ki$$

$$\therefore a = 12k; \cancel{3\lambda} = \cancel{a\lambda} k$$

$$a = 12\left(\frac{3}{a}\right); \frac{3}{a} = k$$

$$a^2 = 36$$

$$a = \pm 6$$

PROPIEDADES DEL CONJUGADO

Dados $z, w \in \mathbb{C}$.

- $z = \bar{z} \iff z$ es un complejo real

- $\bar{\bar{z}} = z$

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

- $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

- $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$

- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

- $\overline{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\bar{z}}$

$$y = 0$$

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Aplicación

Cuántos números complejos z satisfacen la siguiente igualdad

$$\bar{z}^2 = 4z$$

A) 1

B) 2

C) 3

~~D) 4~~

E) 5

Resolución

Notamos: $z_1 = 0$

Juego: $z = x + yi$

reempl. $(x - yi)^2 = 4(x + yi)$

$$x^2 - y^2 - 2xyi = 4x + 4yi$$

$$* -2xy = 4y$$

$$0 = 2y + xy$$

$$0 = y(x + 2)$$

$$x = -2; y = 0$$

$$* x^2 - y^2 = 4x$$

$$\rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x = 0; x = 4$$

$$\rightarrow x = -2 \Rightarrow 4 - y^2 = -8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

Juego

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_3 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

Aplicación

Dada la ecuación en el plano complejo

$$z \cdot \bar{z} - 2\operatorname{Re}(\bar{w}z) + w \cdot \bar{w} = \rho^2$$

determine la ecuación cartesiana.

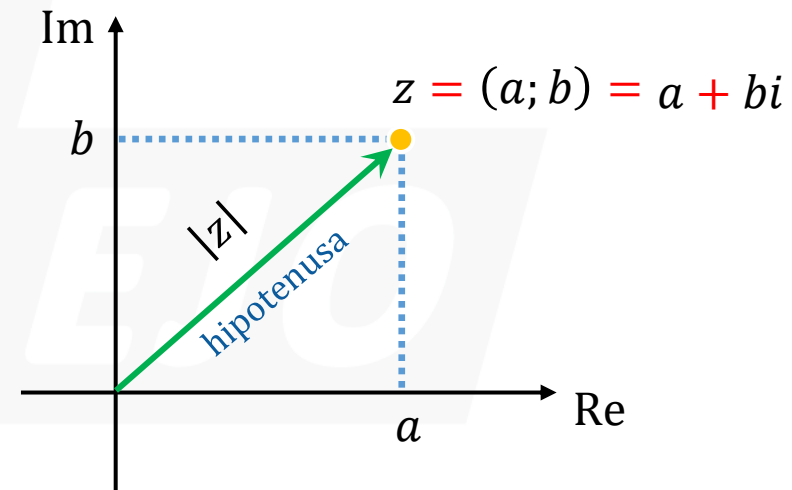
Resolución

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el módulo o valor absoluto de z es un número real no negativo denotado por $|z|$ y se define como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, es la distancia del polo al afijo



Ejemplo

$$\bullet \quad z = 3 + \sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$$

PROPIEDADES DEL MÓDULO

1) $ z \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$	5) $\left \frac{z}{w} \right = \frac{ z }{ w }, w \neq 0$
2) $ z = \bar{z} = z^* $	6) $ z^n = z ^n$
3) $ z ^2 = z \cdot \bar{z}$	7) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{ z }$
4) $ z \cdot w = z w $	

Ejemplos

- $|1 + 2i| = |1 - 2i| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$
- $(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = |1 + \sqrt{3}i|^2 = 2^2$
- $|(-4 + 3i)(1 - i)| = |-4 + 3i| |1 - i| = 5\sqrt{2}$

$$\sqrt{x^2 + 8} = -3x \quad (+) \quad x < 0$$

Aplicación

Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| + \bar{z} = 2z^* + \sqrt{72}i$

Determine z .

A) $2 + \sqrt{3}i$

B) $-2 + \sqrt{2}i$

~~C) $-1 + 2\sqrt{2}i$~~

D) $1 + \sqrt{3}i$

E) $-2 + 2\sqrt{2}i$

Resolución

Sea: $z = x + yi \rightarrow z = -1 + 2\sqrt{2}i$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + yi = 2(-x - yi) + \sqrt{72}i$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x) + yi = -2x + (6\sqrt{2} - 2y)i$$

$$* y = 6\sqrt{2} - 2y \quad * \sqrt{x^2 + y^2} + x = -2x$$

$$3y = 6\sqrt{2}$$

$$y = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2 + 8} = (-3x)^2$$

$$x^2 + 8 = 9x^2$$

$$x = \pm 1 \leftarrow 1 = x^2$$

$$\rightarrow x = -1$$

Aplicación

Halle $|z|$ si $z = \frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}i}(1+\sqrt{3}i)^2}{1+i}$

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 2

Resolución

Aplicamos módulo

$$|z| = \left| \frac{\sqrt{1+2\sqrt{2}i}(1+\sqrt{3}i)^2}{1+i} \right|$$

$$|z| = \frac{\sqrt{|1+2\sqrt{2}i|} |1+\sqrt{3}i|^2}{|1+i|}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{\sqrt{9}} \sqrt{3}^2}{\sqrt{2}} = \dots$$

Aplicación

Determine la gráfica que mejor representa

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 1 \right\}$$

Resolución

Sea $z = x+yi$

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+x)+yi}{(1-x)-yi} \cdot \frac{(1-x)+yi}{(1-x)+yi}$$

$$= \frac{(1+x)(1-x)-y^2}{(1-x)^2+y^2} + \dots i$$

$$\cancel{1-x^2-y^2} = \cancel{1-2x+x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

es una circunferencia
 $r = \frac{1}{2}$
 $C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

— ACADEMIA —

CÉSAR

VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:   

academiacesarvallejo.edu.pe